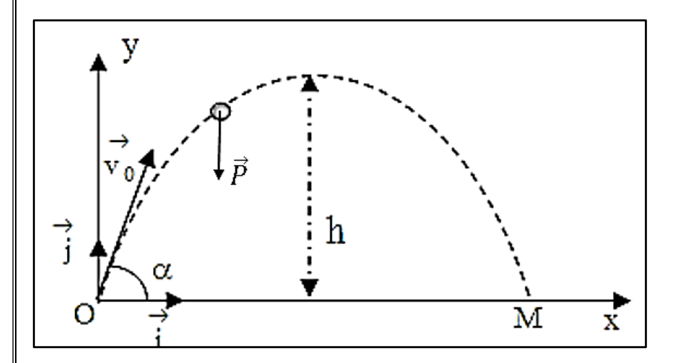
دراسة حركة القذائف القذيفة

عند قذفة كرة بسرعة ابتدائية غير شاقولية نحصل على حركة مسارها موضح في الشكل:



الشروط الابتدائية: تختلف الشروط الابتدائية حسب الحركة المدروسة.

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$\cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

$\begin{cases} v_x = v_B \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_B \sin\alpha \end{cases}$

1- المعادلات التفاضلية:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

- طبيعة الحركة على المحاور:
  - الحركة على المحور (ox) حركة مستقيمة منتظمة لأن $a_x = 0$.
  - الحركة على المحور (oy) حركة مستقيمة متغيرة بانتظام متباطئة في مرحلة الصعود ومتسارعة في النزول.

2- المعادلات الزمنية:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

- معادلات السرعة: بالتكامل نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = at + v_{0y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

- معادلات الموضع: بالتكامل نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

3- معادلة المسار:

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t \Rightarrow y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{gx^2}{2{v_0}^2 cos^2\alpha} + tan\,\alpha\, x$$

4- نقاط خاصة في مسار القذيفة:

- **الذروة:** وهي أعلى موضع تصله الكرة.

عند الذروة يكون $v_y = 0$

$$v_y = -gt + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

نعوض في معادلات الموضع نحصل على احداثيات الذروة.

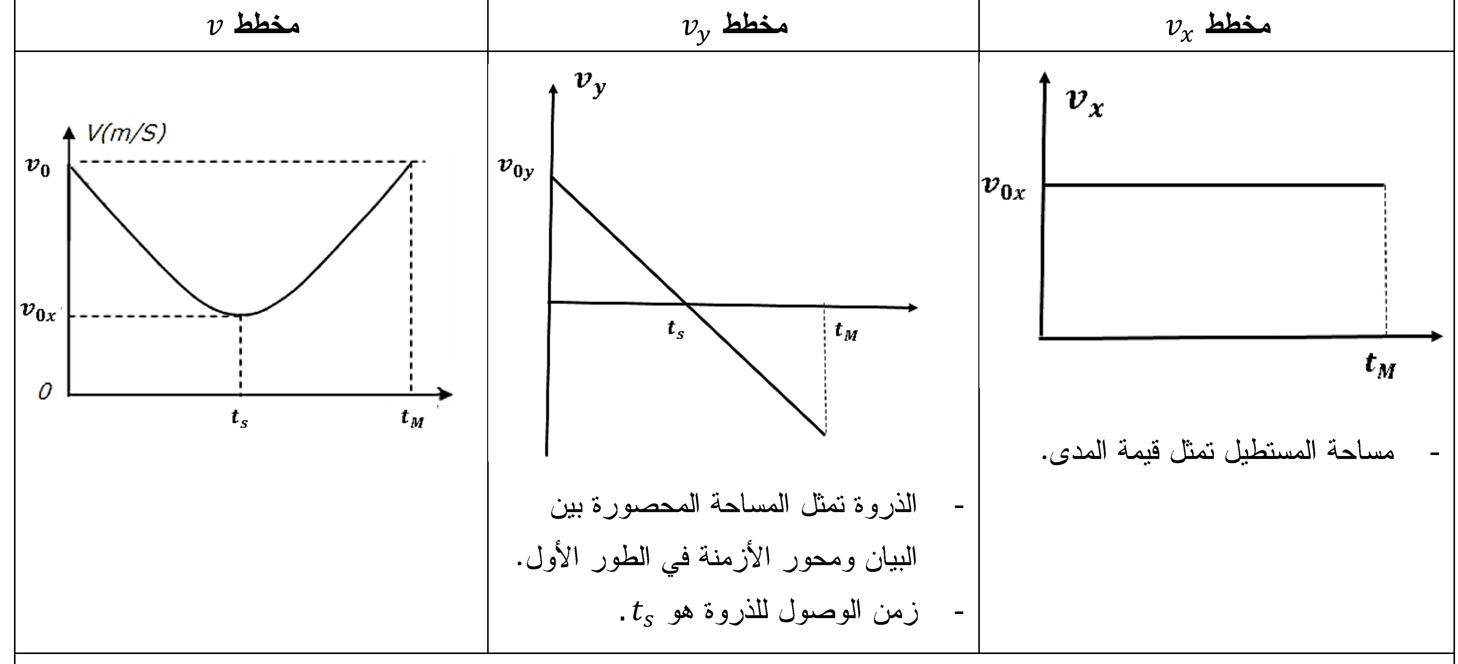
- **المدى:** هو أقصى مسافة تقطعها الكرة. حسب الشكل $x = d = OM$ تمثل المدى أي أن $y = 0$.

$$y = -\frac{gd^2}{2{v_0}^2cos^2\alpha} + tan\,\alpha\, d = 0 \Rightarrow \frac{gd}{2{v_0}^2cos^2\alpha} = tan\,\alpha \Rightarrow d = \frac{2{v_0}^2cos^2\alpha \times tan\,\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2{v_0}^2 \cos\alpha \times \sin\alpha}{g} \Rightarrow \boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{{v_0}^2 \sin 2\alpha}}{\boldsymbol{g}}$$

- **مناقشة المدى:** يكون المدى أعظميا عندما يكون $\sin 2\alpha = 1$ أي $2\alpha = 90°$ ومنه $\alpha = 45°$

5- مخططات السرعة:



مخطط v_x	مخطط v_y	مخطط v
- مساحة المستطيل تمثل قيمة المدى.	- الذروة تمثل المساحة المحصورة بين البيان ومحور الأزمنة في الطور الأول. - زمن الوصول للذروة هو t_S.	

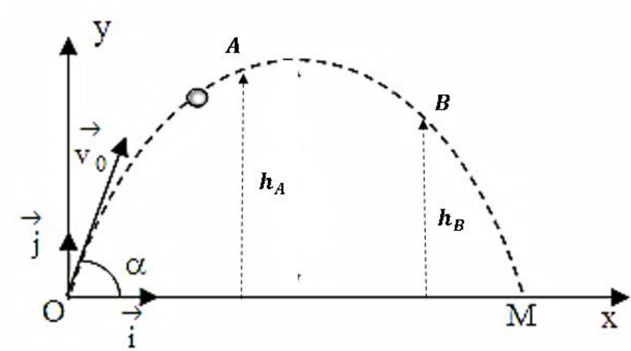
من المخططات يمكن استنتاج كلا من الزاوية α والسرعة الابتدائية v_0 .

$${v_0}^2 = {v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2$$

$$sin\,\alpha = \frac{v_{0y}}{v_0} \quad ، \quad \cos\alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} \quad ، \quad tan\,\alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$$

6- ملاحظات هامة:

- **علاقة محذوفية الزمن:** ${v_B}^2 - {v_A}^2 = 2gh_{AB}$
- استعمال مبدأ انحفاظ الطاقة للجملة (الكرة+ارض) بين الموضعين A و B.



$$E_{CA} + E_{PPA} = E_{CB} + E_{PPB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_A}^2 + mgh_A = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + mgh_B$$

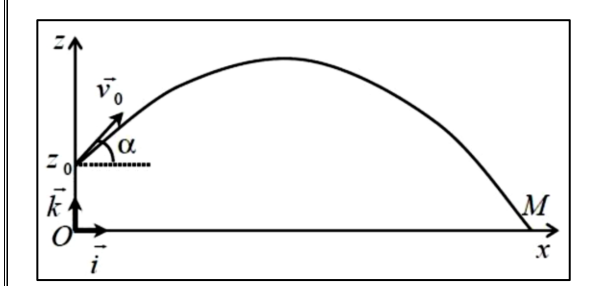
$$\Rightarrow mgh_A - mgh_B = \frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2$$

$$\Rightarrow gh_A - gh_B = \frac{1}{2}{v_B}^2 - \frac{1}{2}{v_A}^2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{{v_B}^2 - {v_A}^2 = 2g(h_A - h_B)}$$

التمرين 1: بكالوريا رياضيات 2011-بتصرف

في لعبة رمي الجلة، يقذف اللاعب في اللحظة $t = 0$ الجلة من ارتفاع $oz_0 = h = 2.0m$ من سطح الارض، بسرعة ابتدائية: $v_0 = 13.7\,m/s$, شعاعها يصنع زاوية $\alpha = 35°$. نهمل تأثير الهواء (مقاومة الهواء ودافعة ارخميدس) ونأخذ $g = 9.8m \times s^{-1}$.



1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القذيفة في المعلم المبين على الشكل استخرج:

أ- المعادلات التفاضلية للحركة.

ب- المعادلات الزمنية للحركة.

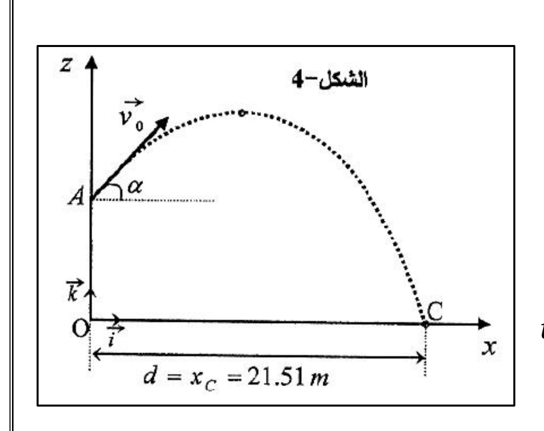
2- اكتب معادلة المسار $z = f(t)$.

3- أوجد احداثيات M نقطة سقوط القذيفة. وما هي سرعتها عندئذ؟

4- نريد ان يكون مدى أعظميا، ما هي الزاوية التي يجب ان تقذف بها الجلة ؟ ثم حدد قيمة المدى حينئذ علما ان اللاعب يقذف الجلة بنفس السرعة v_0 .



التمرين 2: بكالوريا علوم تجريبية 2012



خلال منافسة رمي الجلة في الالعاب الاولمبية ببكين، حقق الرياضي الذي فاز بهذه المنافسة النتيجة $d = 21.51m$. اعتمادا على الفلم المسجل لعملية الرمي ولأجل معرفة قيمة السرعة v_0 التي قذفت بها الجلة، تم استخراج بعض المعطيات أثناء لحظة الرمي:

- قذفت الجلة من النقطة A الواقعة على ارتفاع $h_A = 2m$ بالنسبة لسطح الارض وبالسرعة $\vec{v}_0$ التي تصنع زاوية $\alpha = 45°$ مع الخط الافقي.

ندرس حركة الجلة في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{k})$ ونختار اللحظة الابتدائية $t = 0$ هي اللحظة التي يتم فيها قذف الجلة من النقطة A . نهمل احتكاكات الجلة مع الهواء ودافعة ارخميدس بالنسبة لقوة ثقل الجلة.

1- جد المعادلتين الزمنيتين $x = f(t)$ و $z = h(t)$ المميزتين لحركة الجلة في المعلم المختار.

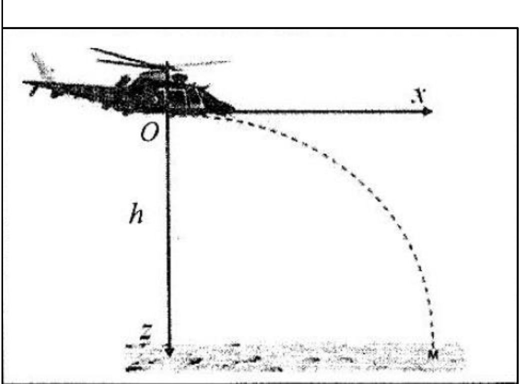
- استنتج معادلة مسار الجلة $z = g(t)$ بدلالة المقادير h_A ، α , g و v_0 .

2- جد عبارة السرعة الابتدائية v_0 بدلالة h_A ، α , g و d ثم احسب قيمتها.

3- جد المدة الزمنية التي تستغرقها الجلة في الهواء.

التمرين 3: بكالوريا رياضيات 2012

في فبراير 2012 هبت عاصفة ثلجية على شمال شرق الجزائر، فاستعملت الطائرات المروحية للجيش الوطني الشعبي لإيصال المساعدات للمتضررين خاصة في المناطق الجبلية.



<u>أولا</u>: تطير المروحية ثابت h من سطح الارض بسرعة أفقية ثابتة قيمتها $v_0 = 50\,m/s$ يترك صندوق من مواد غذائية مركز عطالتها G يسقط في اللحظة $t = 0$ انطلاقا من نقطة O مبدأ الاحداثيات وبالسرعة الابتدائية الافقية $\vec{v}_0$ ليرتطم بسطح الارض في النقطة M .

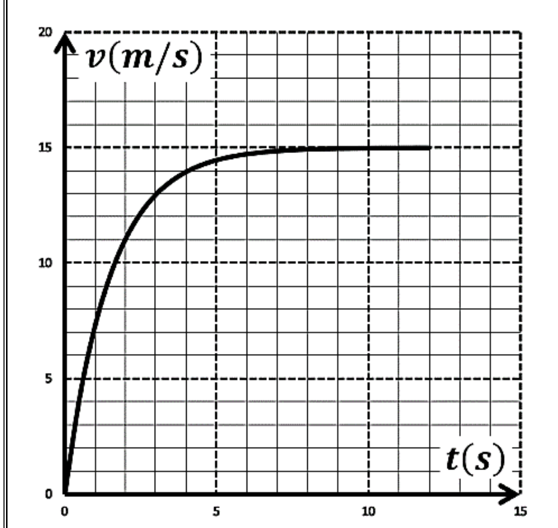
1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جد:

أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $z(t)$.

ب- معادلة المسار $z(x)$.

ج- احداثيات نقطة السقوط M .

د – الزمن اللازم لوصول الصندوق للأرض.



ثانيا: لكي لا تتلف المواد الغذائية عند الارتطام بسطح الارض، تم ربط الصندوق بمظلة تمكنه من النزول شاقوليا ببطء. تبقى المروحية على نفس الارتفاع h السابق في النقطة M , ليترك الصندوق يسقط شاقوليا دون سرعة ابتدائية في اللحظة $t = 0$. يخضع الصندوق لقوة احتكاك الهواء نعبر عنها بالعلاقة $\vec{f} = -100 \times \vec{v}$ حيث: $\vec{v}$ يمثل شعاع سرعة الصندوق في اللحظة t مع اهمال دافعة ارخميدس خلال السقوط.

1- جد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة مركز عطالة الصندوق.

2- يمثل الشكل تطور سرعة مركز عطالة الصندوق بدلالة الزمن t .

أ- جد السرعة الحدية v_l .

ب- حدد قيمتي السرعة والتسارع في اللحظتين : $t = 0$ و $t = 10s$.

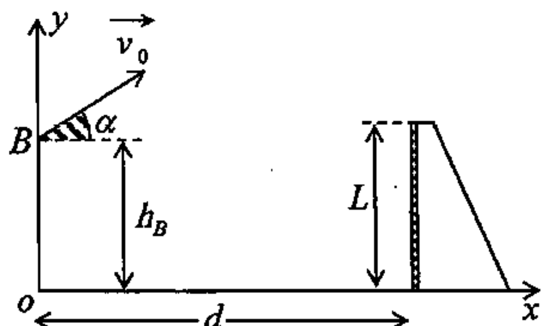
يعطى: $g = 9.8m \times s^{-2}$, $h = 405m$, كتلة الصندوق والمظلة $m = 150kg$.



التمرين 4: بكالوريا علوم تجريبية 2016

المعطيات: $g = 10m/s^2$ ، $v_0 = 10m/s$

بإحدى الحصص التدريبية لكرة القدم استقبل اللاعب كرة زميله فقذفها برأسه نحو المرمى بغية تسجيل هدف. غادرت الكرة رأسه في لحظة نعتبرها $t = 0$ من النقطة B في اتجاه المرمى بسرعة ابتدائية $\overrightarrow{v_0}$ واقعة على المستوي الشاقولي المتعامد مع مستوي المرمى ويصنع حاملها زاوية $\alpha = 30°$ مع الأفق. تقع النقطة B على الارتفاع $h_B = 2m$ من سطح الأرض كما هو موضح بالشكل المقابل .



1- بإهمال أبعاد الكرة وتأثير الهواء عليها، وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة في المعلم السطحي الأرضي (Ox, Oy) أوجد ما يلي:

أ- المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$.

ب- معادلة المسار $y = f(x)$.

ج- قيمة سرعة مركز عاطلة الكرة عند الذروة.

2- يبعد خط التهديف عن اللاعب بالمسافة $d = 10m$ وارتفاع المرمى $L = 2,44m$.

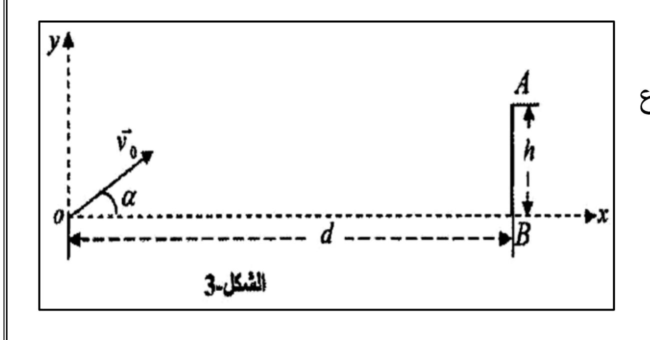
أ- اكتب الشرط الذي يجب ان يحققه كل من x و y لكي يسجل الهدف مباشرة إثر هذه الرمية الرأسية؟

ب- هل سجل اللاعب الهدف بهذه الراسية؟ برر جوابك.

التمرين 5: بكالوريا علوم تجريبية 2010

تؤخذ $g = 10m \times s^{-2}$, مقاومة الهواء ودافعة ارخميدس مهملتان.

لتنفيذ مخالفة خلال مباراة كرة القدم , وضع اللاعب الكرة في النقطة O مكان وقوع الخطأ على بعد $d = 25m$ من خط المرمى , حيث ارتفاع العارضة الافقية $h = AB = 2.44m$. يقذف اللاعب الكرة بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ يصنع حاملها مع الافق زاوية $\alpha = 30°$.



الشكل-3

1- ادرس طبيعة حركة الكرة في المعلم $(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy})$.

- بأخذ مبدأ الازمنة لحظة القذف استنتج معادلة المسار.

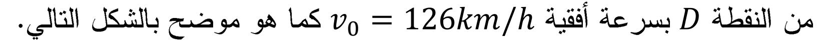
2- كم يجب أن تكون v_0 حتى يسجل الهدف مماسيا للعارضة الافقية (النقطة A) ؟ – ما هي المدة الزمنية المستغرقة؟ وما هي قيمة سرعتها عندئذ (النقطة A) ؟

3- كم يجب أن تكون v'_0 حتى يسجل الهدف مماسا لخط المرمى (النقطة B)؟

التمرين 6: بكالوريا رياضيات 2015:

ملعب التنس عبارة عن مستطيل طوله $23.8\ m$ وعرضه $8.23\ m$. وضعت في منتصفه شبكة ارتفاعها $0.92\ m$. عندما يرسل اللاعب الكرة يجب أن تسقط في منطقة محصورة بين الشبكة وخط يوجد على مسافة $6.4\ m$ من الشبكة كما هو موضح بالشكل.

في دورة رولان قاروس الدولية يريد اللاعب ندال اسقاط الكرة في النقطة B حيث $OB = L = 18.7m$. يرسل اللاعب الكرة نحو الأعلى ثم يضربها بمضربه من نقطة D توجد على ارتفاع $h = 2.2m$ من النقطة O . تنطلق الكرة

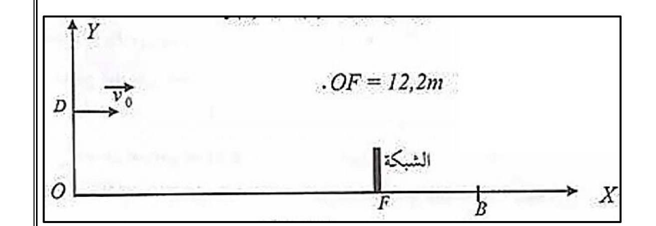


من النقطة D بسرعة أفقية $v_0 = 126km/h$ كما هو موضح بالشكل التالي.

نهمل تأثير الهواء ونأخذ $g = 9.8m/s^2$. نعتبر أن الحركة تتم في معلم سطحي أرضي يعتبر غاليليا.



1- مثل القوى المؤثرة على الكرة خلال حركتها بين D و B .



2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد المعادلتين الزمنيتين للحركة $x(t)$ و $y(t)$.

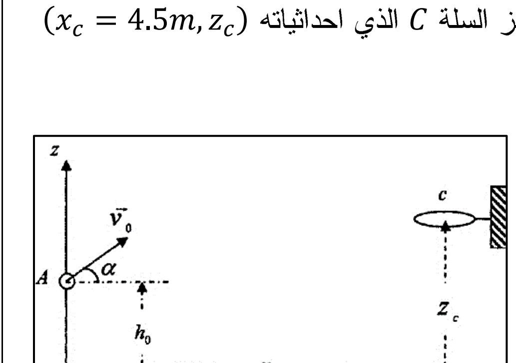
3- استنتج معادلة المسار.

4- هل تمر الكرة فوق الشبكة؟ علما ان $OF = 12.2m$.

5- هل نجح نادال في الارسال؟

التمرين 7: بكالوريا رياضيات 2009

قام لاعب كرة السلة بتسديد الكرة نحو السلة من نقطة A منطبقة على مركز الكرة الموجودة على ارتفاع $h_0 = 2.10m$ من سطح الارض بسرعة ابتدائية $v_0 = 8\ m/s$ يصنع حاملها زاوية $37°$ مع الافق. ليمر مركز الكرة G بمركز السلة C الذي احداثياته $(x_c = 4.5m, z_c)$ في المعلم الارضي $(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy})$ الذي نعتبره غاليليا.



1- ادرس حركة مركز عطالة الكرة في المعلم $(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy})$ معتبرا مبدأ الازمنة لحظة تسديد الكرة واهمال تأثير الهواء.

2- احسب z_c .

3- يعبر مركز عطالة الكرة مركز السلة بسرعة $\vec{v}_c$ التي يصنع حاملها مع الافق زاوية β .

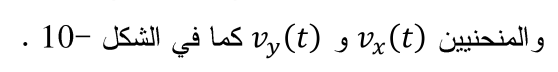
استنتج قيمتي v_c و β . $g = 9.8\ m/s^2$.

التمرين 8: بكالوريا رياضيات 2014:

أثناء دراسة تأثير القوى الخارجية على حركة جسم، كلف الاستاذ تلميذين بمناقشة الحركة الناتجة عن رمي جلة، فأجاب الاول أن حركة الجلة لا تتأثر الا بثقلها، بينما اجاب الثاني أن حركتها تتعلق بدافعة ارخميدس.

من أجل التصديق على الجواب الصحيح، اعتمد التلميذان على دراسة الرمية التي حقق بها رياضي رقما قياسيا عالميا مداها $21.69\ m$.

عند محاولتهما محاكات هذه الرمية بواسطة برنامج خاص، تم قذف الجلة التي نعتبرها جسما نقطيا من ارتفاع $h = 2.62\ m$ بسرعة ابتدائية $v_0 = 13.7\ m \times s^{-1}$ يصنع شعاعها مع الافق زاوية $\alpha = 43°$ فتحصلا على رسم لمسار مركز عطالة الجلة كما في الشكل 9−


والمنحنيين $v_x(t)$ و $v_y(t)$ كما في الشكل 10− .

y(m) ; S ; h ; 2 ; 0 ; 2 ; x(m)

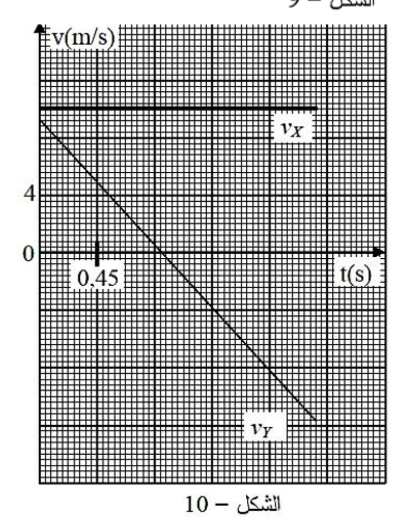
الشكل – 9

i. دراسة نتائج المحاكات:

1- ما هي طبيعة حركة مركز عطالة الجلة على المحور ox ؟ برر اجابتك.

2- عين القيمة v_{0y} للمركبة الشاقولية لشعاع السرعة الابتدائية انطلاقا من الشكل−10 ثم عين قيمة v_0 للسرعة الابتدائية للقذيفة، وهل تتوافق مع المعطيات السابقة : $v_0 = 13.7\ m \times s^{-1}$ و $\alpha = 43°$.

3- عين خصائص شعاع السرعة $\vec{v}_s$ عند الذروة S .



الشكل – 10

ii. الدراسة التحليلية لحركة مركز عطالة الجلة:

المعطيات : الجلة عبارة على كرة حجمها V وكتلتها الحجمية $\rho = 7.1 \times 10^3\ kg/m^3$. الكتلة الحجمية للهواء: $\rho = 1.29\ kg/m^3$.

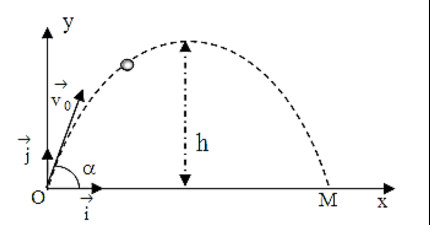
1- بين ان دافعة ارخميدس مهملة أمام ثقل الجلة . أي التلميذين على صواب؟

2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن جد عبارة تسارع مركز عطالة الجلة. نهمل مقاومة الهواء.

3- جد معادلة المسار لمركز عطالة الجلة .

التمرين 9:

نقذف عند اللحظة $t = 0$ كرة كتلتها m ، بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ من نقطة O كماهو مبين على الشكل المقابل. نعتبر أن حركة الجسم تتم في المستوي $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وتدرس بالنسبة للمرجع الأرضي الذي نعتبر مرجعا غاليليا. نهمل كل من مقاومة الهواء و دافعة أرخميدس.



يمثل البيان الموالي تغيرات قيمة سرعة القذيفة بدلالة الزمن بين الوضعين O و M .

1–مثل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب.

2–بتطبيق القانون الثاني لنيوتن بيّن طبيعة الحركة.

3–أوجد المعادلات الزمنية لكل من السرعة والموضع.

4 – أوجد من البيان :

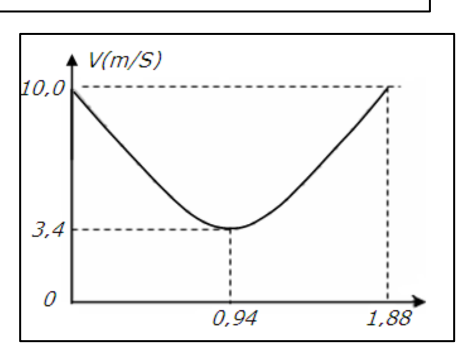
- القيمة v_0 لشعاع السرعة $\vec{v}_0$.

- قيمةالمركبة v_{0x} لشعاع السرعة $\vec{v}_0$.

5 – استنتج قيمة كل من الزاوية α التي قذف بها الجسم و قيمة v_{0y} .

6– مثل كل من $v_x(t)$ و $v_y(t)$ في المجال الزمني $(0 \le t \le 1{,}88)s$.

7– استنتج من المنحنيين كل من المسافة الأفقية OM و الذروة h



التمرين 10 :

يقذف اللاعب كرة التنس $m = 58g$ لإنجاز الإرسال شاقوليا نحوى الأعلى لتصل إلى ارتفاع Z_0 فيضربها بمضربه فتكتسب سرعة $v_0 = 28\,m/s$ يكون منحاها افقي. على الكرة اجتياز شباك موضوع على بعد $12m$ من اللاعب علوه $Z_0 = 0.9m$. ندرس حركة الكرة في المعلم$(ox;oz)$ الذي نعتبره عطاليا .تؤخذ $g = 9.8m \times s^{-2}$.

1− بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد:

أ/ المعادلتين التفاضليتين للحركة و المعادلتين الزمنيتين للحركة.

ب/استنتج معادلة المسار $z = f(x)$.

ج/ ماهي قيمة Z_0 حتى تمر الكرة على ارتفاع$10cm$ من الشبكة .

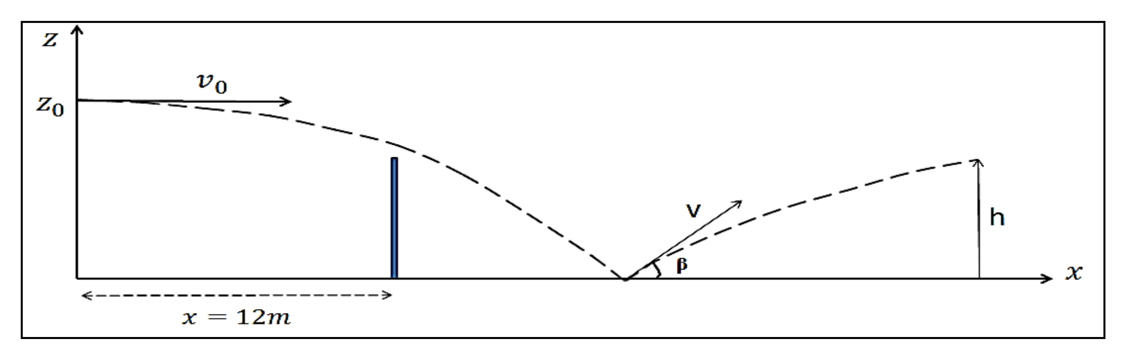
د/ إذا كان طول الملعب $24m$, هل تصطدم الكرة بالأرض قبل خروجها من الملعب ؟ برر إجابتك .

ه/ احسب سرعة الكرة v لحظة اصطدامها بالأرض .

2− نفرض ان الكرة تنطلق من جديد بعد اصطدامها بالأرض بنفس السرعة السابقة v وبزاوية عن الافق $\beta = 15°$ في اتجاه اللاعب الثاني الموجود في خط نهاية الملعب أي على بعد $24m$ من اللاعب الاول ، باعتبار نقطة الاصطدام بالأرض هي مبدأ الفواصل.

أ/ اكتب معادلة المسار الجديد دون اثبات .

ب/ ما هي قيمة الارتفاع h لكرة عند وصولها الى اللاعب الثاني ؟



تمرين11: بكالوريا علوم تجريبية 2016

نهمل تأثير الهواء ونأخذ $g = 9{,}8m/s^2$.

شاحنة تسير على طريق مستقيم افقي ، في لحظة نعتبرها مبدأ لقياس الأزمنة $t = 0$ تقذف العجلة الخلفية للشاحنة نحو الوراء من نقطة O من سطح الأرض حجرا نعتبره نقطيا بسرعة ابتدائية $v_0 = 12m/s$ يصنع حاملها زاوية $\alpha = 37°$ مع الأفق فيرتطم بالنقطة M من الزجاج الامامي لسيارة تسير خلف الشاحنة وفي نفس جهة حركتها بسرعة ثابتة قدرها $90km/h$. في اللحظة $t = 0$ كانت المسافة الافقية بين النقطة O والنقطة M : $d = 44m$ انظر الشكل.

1- ادرس حركة الحجر في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ثم استخرج العبارتين الحرفيتين للمعادلتين الزمنيتين للحركة $x(t)$ و $z(t)$.

2- اكتب معادلة مسار الحجر $z = f(x)$.

3- اكتب المعادلة الزمنية $x_M(t)$ لحركة النقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4- احسب قيمة t_M لحظة ارتطام الحجر بالزجاج الامامي للسيارة واستنتج الارتفاع h للنقطة M عن سطح الأرض.

5- باستعمال معادلة انحفاظ الطاقة احسب سرعة ارتطام الحجر بزجاج السيارة .